Prof. Candeias / Pavón

Análisis matemático II 2° parcial 18-7-25

Apellido y nombre: Curso: Z2112

T1	T2	P1	P2	P3	P4	Calificación

T1)

a) Enunciar el Teorema de Green.

b) Calcular la circulación (aplicando el Teorema antes enunciado) del campo $\overline{f}(x,y)=(-y,x)$ a lo largo de $y=2x-x^2$ desde el $(0,0)$ al $(2,0)$ sabiendo que la circulación del campo a lo largo del segmento que une dichos puntos en sentido (2,0) al (0,0) es $\frac{8}{3}$.

T2)

a) Enunciar el teorema de cambio de variables para integrales dobles.

b) Calcule el $\text{Área}(D_{xy})$ sabiendo que a través del cambio de variables definido por $(x,y)=(u+2v,3u+v)$, la región D_{xy} se transforma en D_{uv} con $\text{Área}(D_{uv})=4$.

P1)

Calcular la masa del cuerpo determinado por: $\begin{cases} x^2+y^2\le 4 \\ z\le\sqrt{x^2+y^2} \end{cases}$ en 1° octante cuya densidad en cada punto es proporcional a la distancia desde el punto al eje z.

P2)

Calcular el flujo del campo $\overline{f}(x,y,z)=(e^y,\ xz,3z)$ a través de la superficie $z=4-x^2-y^2$ con $z\ge -2$ indicando gráficamente la orientación que ha elegido para la superficie.

P3)

Calcular el trabajo realizado por el campo vectorial $\overline{f}(x,y,z)=(zy^2,z^2,x^2)$ a lo largo de la curva C determinada por la intersección entre $x^2+y^2+z^2=8$ con $y=\sqrt{x^2+z^2}$. Indicar gráficamente el sentido con que decidió circular a lo largo de C.

P4)

Calcular la circulación del campo $\overline{f}(x,y)=(1,\ 0)$ a lo largo de la curva C solución de la EDO $y''-4y'+4y=e^{2x}$ con $y(0)=1$ e $y'(0)=0$ desde x = 0 hasta x = 1.

AM 2	2° parcial / Prof. Cendeias / Parón	HOJA N° 1/3 / FECHA 18-7-25

T1 a) Enunciar el t. Green

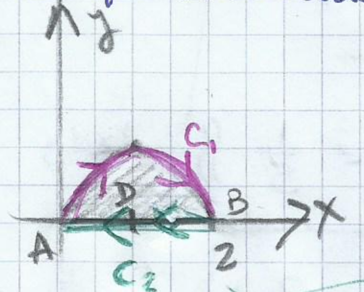
D es un región de $\mathbb{R}^2$ (compacta)

C curva frontera de D, suave y cerrada, orientada positivamente

$\bar{F} = (P, Q) \in C^1$

$\therefore \displaystyle\oint_{C^+} \bar{F}\, d\bar{l} = \iint_D Q'_x - P'_y \, dx\, dy$

b) Calcular la circulación (aplicando el teorema antes enunciado) del campo $\bar{F}(x,y) = (-y, x)$ a lo largo de $y = 2x - x^2$ desde $(0,0)$ hasta $(2,0)$ sabiendo que la circulación del campo a lo largo del segmento que une dichos puntos en sentido $(2,0) \to (0,0)$ es $8/3$



$y = x(2-x) \to$ raíces 0 y 2

$y = 2x - x^2$ de $(0,0)$ a $(2,0)$

$\displaystyle\int_{C_1} \bar{F}\, d\bar{l} = ?$

$\displaystyle\int_B^A \bar{F}\, d\bar{l} = 8/3$

$C = C_1 \cup C_2$

$\displaystyle\oint_C \bar{F}\, d\bar{l} = \int_{C_1} \bar{F}\, d\bar{l} + \int_{C_2} \bar{F}\, d\bar{l}$

t. Green

$$\oint_{C^+} \bar{F}\, d\bar{l} \overset{\downarrow}{=} \iint_D \overset{Q'_x}{1} - \overset{P'_y}{(-1)} \, dx\, dy = 2 \int_0^2 \int_0^{2x-x^2} dy\, dx =$$

$$= 2 \int_0^2 2x - x^2 \, dx = \boxed{\frac{8}{3} = \oint_{C^+} \bar{F}\, d\bar{l}}$$

$$\oint_{C^-} \bar{F}\, d\bar{l} = \int_{C_1} \bar{F}\, d\bar{l} + \int_{C_2} \bar{F}\, d\bar{l}$$

$$-\frac{8}{3} = \int_{C_1} \bar{F}\, d\bar{l} + \frac{8}{3} \longrightarrow \boxed{\int_{C_1} \bar{F}\, d\bar{l} = \frac{-16}{3}}$$

NOTA

T2 a) enunciar el teorema de cambio de variables para integrales dobles

Sean D y D^* dos regiones elementales del plano

$T: D \to D^* \;/\; T(D) = D^*$ con $T(u,v) = (x(u,v), y(u,v))$

$$\therefore \iint_D F(x,y)\,dx\,dy = \iint_{D^*} F(x(u,v), y(u,v))\,|J|\,du\,dv$$

donde $|J| = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix} = \dfrac{1}{\begin{vmatrix} u'_x & u'_y \\ v'_x & v'_y \end{vmatrix}}$

b) Calcular el área D_{xy} sabiendo que a través del cambio de variables definido por:

$$(x,y) = (u+2v,\ 3u+v),$$

la región D_{xy} se transforma en D_{uv} con área $D_{uv} = 4$

$$\begin{cases} x = u+2v \\ y = 3u+v \end{cases}$$

$$4 = \iint_{D_{uv}} du\,dv \overset{CV}{=} \iint_{D_{xy}} |J|\,dx\,dy = \frac{1}{5}\iint_{D_{xy}} dx\,dy$$

$$\Rightarrow 4 \cdot 5 = \boxed{\iint_{D_{xy}} dx\,dy = 20}$$

Pasamos de $du\,dv$ a $dx\,dy$

$$|J| = \begin{vmatrix} u'_x & u'_y \\ v'_x & v'_y \end{vmatrix} = \frac{1}{\begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix}} = \frac{1}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{1}{-5}$$

$$|J| = 1/5$$

NOTA

AM 2	2° parcial Prof Candelas / Pavon	HOJA N° 2/3 FECHA 18-7-25

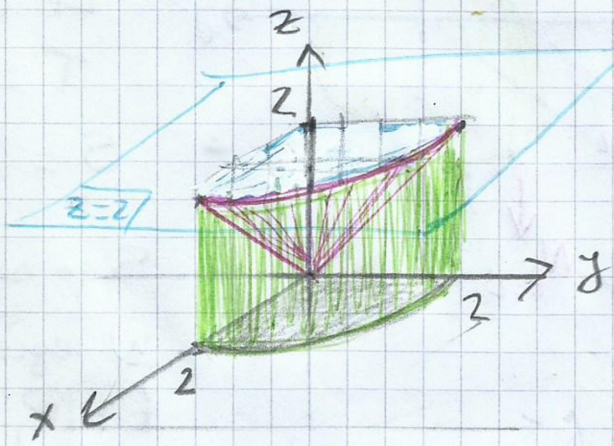
(P1) Calcular la masa del cuerpo determinado por:

$$W: \begin{cases} x^2+y^2 \leq 4 \\ z \leq \sqrt{x^2+y^2} \end{cases} \quad 1° \text{octante}$$

cuya densidad en cada punto es proporcional a la distancia desde el punto al eje Z

$$Vol_W = \iiint_W \delta(x,y,z)\, dx\,dy\,dz$$

$$\delta(x,y,z) = k\sqrt{x^2+y^2}$$



$$W: \begin{cases} x^2+y^2 \leq 4 \rightarrow \text{cilindro } 1° \text{octante} \\ z \leq \sqrt{x^2+y^2} \rightarrow \text{cono} + \end{cases}$$

$\hookrightarrow z \geq 0$

$z^2 \leq x^2+y^2$

$$\begin{cases} x = r\cos(t) \\ y = r\,\text{sen}(t) \\ z = z \end{cases}$$

Analizo la proy.:

$$\begin{cases} x^2+y^2 = 4 \\ z^2 = x^2+y^2 \end{cases} \quad z^2 = 2$$

$1°$ oct

$0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$

$0 \leq r \leq 2$

$0 \leq z \leq r$

$$Vol_W = \iiint_W k\sqrt{x^2+y^2}\, dx\,dy\,dz =$$

$$\overset{c.v.}{=} k\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^2\int_0^r r \underbrace{r}_{\sqrt{x^2+y^2}}\, dz\,dr\,dt = k\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^2 r^2(r-0)\, dr\,dz =$$

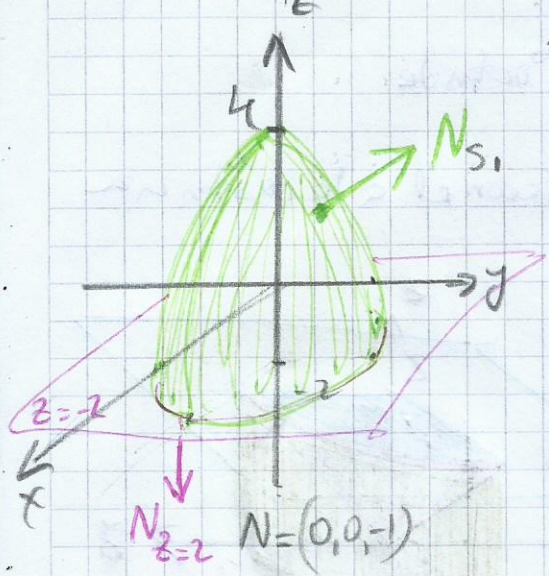
Jac.

$$= k\int_0^{\frac{\pi}{2}} dt \int_0^2 r^3\, dr = k\,\frac{\pi}{\cancel{2}_1}\cdot 4^2$$

$$\boxed{\text{Masa} = 2k\pi}$$

NOTA

(P2) Calcular el flujo del campo $\bar{f}(x,y,z) = (e^{y}, xz, 3z)$ a través de la sup S_1: $\boxed{z = 4 - x^2 - y^2}$ con $z \geq -2$ indicando, claramente, la orientación elegida para la sup.



en $z=-2$: $-2 = 4 - x^2 - y^2$

$x^2 + y^2 = 6$

Sup abierta

Le agrego una tapa T

T: disco radio $\sqrt{6}$ en $z = -2$

$$S = S_1 \cup T \Rightarrow \oiint_S \bar{f}\, d\bar{s} = \iint_{S_1} \bar{f}\, d\bar{s} + \iint_T \bar{f}\, d\bar{s} \quad (*)$$

S es sup cerrada, suave, frontera de W

W región de $\mathbb{R}^3$

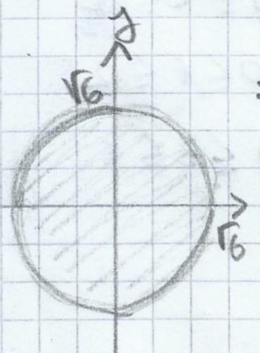
$\bar{f} = (P, Q, R) \in C^1$ (componentes funciones elementales)

T. Gauss

$$\oiint_S \bar{f}\, d\bar{s} = \iiint_W \operatorname{div}(\bar{f})\, dx\,dy\,dz = \iiint_W \overset{\operatorname{div}}{3}\, dx\,dy\,dz \overset{C.V}{=}$$

$$= 3\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{6}}\int_{-2}^{4-r^2} \overset{\text{Jac.}}{r}\, dz\,dr\,dt = 3\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{6}} r(4 - r^2 + 2)\, dr\,dt =$$

$$= 3\int_0^{2\pi} 9\, dt = \boxed{54\pi = \oiint_S \bar{f}\, d\bar{s}}$$



$\begin{cases} x = r\cos(t) \\ y = r\,\text{sen}(t) \\ z = z \end{cases}$

$0 \leq r \leq \sqrt{6}$

$0 \leq t \leq 2\pi$

$-2 \leq z \leq 4 - r^2$

$$\iint_T \bar{f}\, d\bar{s} = \iint_{T_{xy}} \bar{f}\, N\, dx\,dy = \iint_{T_{xy}} (e^{y}, xz, 3z)(0,0,-1)\, dx\,dy =$$

$$= \iint_{T_{xy}} -3z\, dx\,dy \overset{z=-2}{=} 6 \underbrace{\iint_{T_{xy}} dx\,dy}_{\text{Área } T_{xy}} =$$

$$= 6\pi\sqrt{6}^2 = \boxed{36\pi = \iint_T \bar{f}\, d\bar{s}}$$

(*) $54\pi = \iint_{S_1} \bar{f}\, d\bar{s} + 36\pi$

$$\boxed{\iint_{S_1} \bar{f}\, d\bar{s} = 18\pi}$$

NOTA

AM2	2° parcial Prof. Candeias / Parra	HOJA N° 3/3 FECHA 18-7-25

(P3) Calcular el trabajo realizado por el campo vectorial $\bar{f}(x,y,z) = (\underbrace{zy^2}_{P}, \underbrace{z^2}_{Q}, \underbrace{x^2}_{R})$ a lo largo de la curva C determinada por la intersección entre $x^2+y^2+z^2=8$ con $y=\sqrt{x^2+z^2}$

Indicar el sentido elegido para circular a lo largo de C

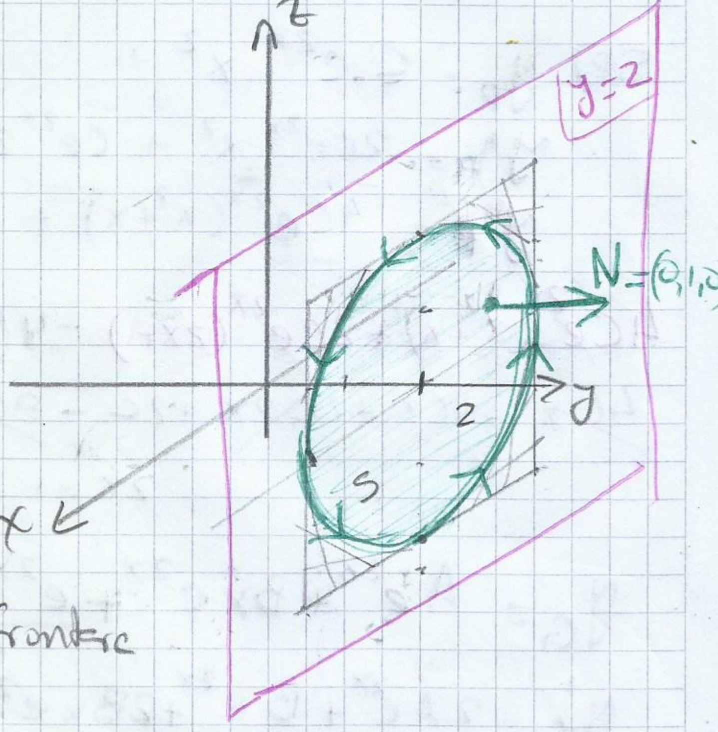
Hallo C:

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=8 \quad (I) \\ y=\sqrt{x^2+z^2} \quad y\geq 0 \end{cases} \rightarrow y^2 = x^2+z^2 \quad (II),\ y\geq 0$$

(I) y (II) $2y^2 = 8 \rightarrow y = 2$

reescribo

$$C: \begin{cases} x^2+z^2 = 4 \\ y = 2 \end{cases}$$



C: curva cerrada y suave, frontera de S

S: superficie orientable

$\bar{F} = (P,Q,R) \in C^1$ pues tiene componentes polinómicas

$\Rightarrow$ T. Stokes $\Rightarrow \oint_{C^+} \bar{f}\, d\bar{e} = \iint_S \text{rot}(\bar{f})\, d\bar{s} = \iint_{S_{xz}} \text{rot}(\bar{f})\, N\, dxdz =$

$$= \iint_{S_{xz}} (-2z, y^2-2x, -2zy)\,(0,1,0)\,dxdz = \iint_{S_{xz}} y^2 - 2x\, dxdz =$$

$$\xrightarrow{y=2} = \iint_{S_{xz}} 4-2x\,dxdz = 4\underbrace{\iint_{S_{xz}} dxdz}^{\text{área } S_{xz}} - 2\underbrace{\iint_{S_{xz}} x\,dxdz}_{0} =$$

(por la simetría de S en x)

$$= 4\pi \cdot 2^2 \qquad \boxed{\oint_{C^+} \bar{f}\, d\bar{e} = 16\pi}$$

$\text{rot}(\bar{F}) = (R'_y - Q'_z,\ P'_z - R'_x,\ Q'_x - P'_y) =$

$(0-2z,\ y^2-2x,\ 0-2zy) = \text{rot}(\bar{F}) = (-2z, y^2-2x, -2zy)$

NOTA

P4 Calcular la circ. del campo $\bar{f}(x,y) = (1,0)$ a lo largo de la curva C solución de la EDO $y'' - 4y' + 4y = e^{2x}$ con $y(0) = 1$ e $y'(0) = 0$ desde $x=0$ hasta $x=1$

SH) $y'' - 4y' + 4y = 0$

$r^2 - 4r + 4 = 0 \rightarrow r_1 = r_2 = 2$ $\boxed{y_H = Ae^{2x} + Bxe^{2x}}$

SP) $y_p = Ce^{2x}x^2$

$y'_p = 2Ce^{2x}x^2 + Ce^{2x}2x = 2Ce^{2x}(x^2+x)$

$y''_p = 4Ce^{2x}(x^2+x) + 2Ce^{2x}(2x+1)$

$4C\cancel{e^{2x}}(x^2+x) + 2C\cancel{e^{2x}}(2x+1) - 4(2C\cancel{e^{2x}}(x^2+x)) + 4C\cancel{e^{2x}}x^2 = \cancel{e^{2x}}$

$\cancel{4Cx^2} + \cancel{4Cx} + \cancel{2C2x} + 2C - \cancel{8Cx^2} - \cancel{8Cx} + \cancel{4Cx^2} = 1$

$2C = 1 \rightarrow C = 1/2$ $\boxed{y_P = \frac{e^{2x}x^2}{2}}$

$y_G = Ae^{2x} + Bxe^{2x} + \frac{e^{2x}x^2}{2}$

$y'_G = 2Ae^{2x} + Be^{2x} + 2Bxe^{2x} + \frac{2e^{2x}x^2}{2} + \frac{e^{2x}2x}{2}$

$y(0) = \boxed{1 = A}$

$y'(0) = 0 = 2A + B \rightarrow \boxed{B = -2}$

$\boxed{y(G) = e^{2x} - 2xe^{2x} + \frac{x^2e^{2x}}{2}}$

$C: \bar{\beta}(t) = \left(t, e^{2t} - 2te^{2t} + \frac{t^2e^{2t}}{2}\right) \quad t \in [0,1]$

$\bar{\beta}'(t) = \left(1, 2e^{2t} - 2e^{2t} - 4te^{2t} + \frac{2te^{2t} + t^2e^{2t}2}{2}\right)$

$\int_C \bar{f}\,d\bar{l} = \int_0^1 (1,0)(1, 2e^{2t} - 2e^{2t} - 4te^{2t} + te^{2t} + t^2e^{2t})\,dt =$

$= \int_0^1 1\,dt = \boxed{1 = \int_C \bar{f}\,d\bar{l}}$

NOTA